Bul. Ştiinţ. Univ. Baia Mare, Ser. B,
Matematică-Informatică, Vol. XVIII (2002) Nr. 2, 285-290.

UNE ESQUISSE DES GRAPHES À COMPOSITION

GABRIELA OLTEANU

Abstract. We present a survey on the way of constructing a sketch, taking a sketch of a composition graph as example and using the tools of Sketch Theory developed by Charles Ehresmann.
2000 Mathematics Subject Classification: 18C30.
Keywords: Esquisse, esquisse projective.

1. Introduction

Les esquisses sont connues depuis les travaux d'Ehresmann dans les anneés 60 et sont étudiées en détail depuis cette époque par quelques chercheurs.

Les esquisses permettent de décrire à l'aide de la théorie des catégories les mêmes structures que la logique du premier ordre.

En plus, les esquisses rendent possible une description très concise, souvent finie pour les structures les plus courantes. C'est la raison pour laquelle on essaye d'utiliser les esquisses pour construir des nouveaux langages de modélisation et l'application des esquisses dans UML (*Unified Modelling Language*).

2. Notions de théorie des esquisses

Définition 2.1. Un *graphe orienté* $\mathcal{G}$ est formé:

- d'un ensemble $Ob\,\mathcal{G}$, dit ensemble des objets de $\mathcal{G}$;
- d'un ensemble $Fl\,\mathcal{G}$, dit ensemble des flèches de $\mathcal{G}$;
- de deux applications d et c de $Fl\mathcal{G}$ vers $Ob\mathcal{G}$ associant à toute flèche son domaine et respectivement son codomaine, dites applications de sélection des domaines (ou sources) et respectivement de sélection des codomaines (ou buts) des flèches;
- et d'une application i de $Ob\,\mathcal{G}$ vers $Fl\,\mathcal{G}$ associant à tout objet sa flèche identité, dite application de sélection des identités;

ces données étant soumises au seul axiome (de position) suivant:

$$\forall A \in Ob\,\mathcal{G}, \quad d.i(A) = A \quad \text{et} \quad c.i(A) = A\,.$$

Définition 2.2. Un *graphe à composition* $\mathcal{G}$ est un graphe orienté muni:

- d'un ensemble de couples de flèches composables

$$Comp\,\mathcal{G} \subset Cons\,\mathcal{G} = \{(g', g) \in Fl\,\mathcal{G} \times Fl\,\mathcal{G} \;\; | \;\; d(g') = c(g)\}$$

• d'une application k de $Comp\mathcal{G}$ vers $Fl\,\mathcal{G}$ associant à tout couple de flèches composables $g_1 : G_1 \to G_2$, $g_2 : G_2 \to G_3$ sa flèche composée $k(g_2, g_1) : G_1 \to G_3$ qu'on note $g_2 \circ g_1$

et qui vérifie:

• unitarité: $a \circ i(A_1) = a$ et $i(A_2) \circ a = a$ pour toute flèche $a : A_1 \to A_2$;

• position: $\forall (g_2, g_1) \in Comp\,\mathcal{G}$ $d(g_2, g_1) = d(g_1)$ et $c(g_2, g_1) = c(g_2)$.

Définition 2.3. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est un graphe à composition dans lequel:

• les ensembles $Comp\,\mathcal{C}$ et $Cons\,\mathcal{C}$ sont égaux;

et qui vérifie:

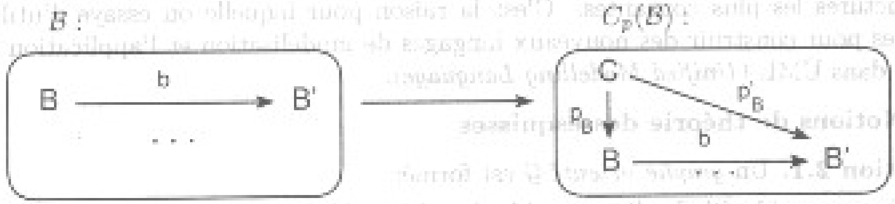
• associativité: $(a_3 \circ a_2) \circ a_1 = a_3 \circ (a_2 \circ a_1)$ pour tout triplet de flèches (a_3, a_2, a_1) tel que les couples (a_3, a_2) et (a_2, a_1) soient consécutifs.

Exemple 2.4. (1) La catégorie Or (des graphes orientés) dont les objets sont les graphes orientés et les flèches sont les homomorphismes de graphes orientés;

(2) La catégorie $Comp$ (des graphes à composition) dont les objets sont les graphes à composition et les flèches sont les foncteurs entre eux.

Définition 2.5. Soit $\mathcal{B}$ un graphe à composition. Le *cône projectif-type de base-type* $\mathcal{B}$, ou simplement le *cône* $\mathcal{B}$*-projectif-type*, est le graphe à composition $C_p(\mathcal{B})$ formé de $\mathcal{B}$, d'un point C, d'une flèche $p_B : C \to B$ pour tout point B de $\mathcal{B}$, avec $b \circ p_B = p_{B'}$ pour toute flèche $b : B \to B'$ de $\mathcal{B}$.

Le point C est le *sommet-type* du cône $C_p(\mathcal{B})$ et la flèche p_B est sa *projection-type* vers B.



Définition 2.6. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ deux graphes à composition. Un *cône projectif de base-type* $\mathcal{B}$, ou simplement *cône* $\mathcal{B}$*-projectif*, dans $\mathcal{G}$ est un foncteur $\chi : C_p(\mathcal{B}) \to \mathcal{G}$.

Le foncteur $\eta = \chi \circ \beta_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ est *la base* du cône profectif χ; l'image $\chi(C)$ du sommet-type de $C_P(\mathcal{B})$ est *le sommet* de χ, et les images $\chi(p_B)$ des projections-type de $C_P(\mathcal{B})$ sont les *projections* de χ.

Définition 2.7. Une *esquisses projective* $\mathbb{E}$ est constituée par:

• la donnée d'un graphe à composition, dit sous-jacent ou support, et noté $Supp(\mathbb{E})$ ou $\mathbb{E}$;

• la donnée d'un ensemble $CPDist(\mathbb{E})$ de cônes projectifs (de bases-types éventuellement variables), à valeurs dans $\mathbb{E}$, dits distingués dans $\mathbb{E}$.

Plus généralement, une esquisse mixte, i.e. projective et inductive, est constituée par la donnée d'un graphe à composition support, la donnée d'un ensemble de cônes projectifs distingués et, de plus, la donnée d'un ensemble de cônes inductifs distingués.

Remarque. Tout graphe à composition $\mathcal{G}$ s'identifie évidemment à une esquisse projective triviale, encore notée $\mathcal{G}$, pour laquelle on a donc $CPDist(\mathcal{G}) = \emptyset$ et $\underline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.

Définition 2.8. Soient $\mathbb{E}$ une esquisse projective et $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *modèle* de $\mathbb{E}$ vers $\mathcal{C}$ est un foncteur tel que l'image de tout cône projectif distingué de $\mathbb{E}$ soit un cône projectif limite de $\mathcal{C}$.

Définition 2.9. Un *homomorphisme de modèles* de $\mathbb{E}$ vers $\mathcal{C}$ est une transformation naturelle entre les foncteurs sous-jacents.

Définition 2.10. Les modèles de $\mathbb{E}$ vers $\mathcal{C}$ forment les objets, et les homomorphismes entre ces modèles forment les flèches d'une catégorie notée:

$$Mod(\mathbb{E}, \mathcal{C})$$

et nommé la *catégorie des modèles* de l'esquisse $\mathbb{E}$.

Remarque. Si $\mathcal{C} = Ens$, alors $Mod(\mathbb{E}, Ens)$ s'appelle la *catégorie des modèles ensemblistes* de l'esquisse $\mathbb{E}$.

Les esquisses projectives permettent de décrire des catégories comme catégories de modèles:

Définition 2.11. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathbb{E}$ une esquisse projective. Alors $\mathbb{E}$ **esquisse** $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des modèles ensemblistes de $\mathbb{E}$:

$$\mathcal{C} \simeq Mod(\mathbb{E})$$

3. La construction d'une esquisse des graphes à composition

Nous allons construire une esquisse des graphes à composition c'est-à-dire une esquisse dont la catégorie des modèles ensemblistes est équivalente à la catégorie $Comp$ des graphes à composition.

a) La construction du graphe orienté sous-jacent et les equations:

1) $(A \xrightarrow{f} B)$

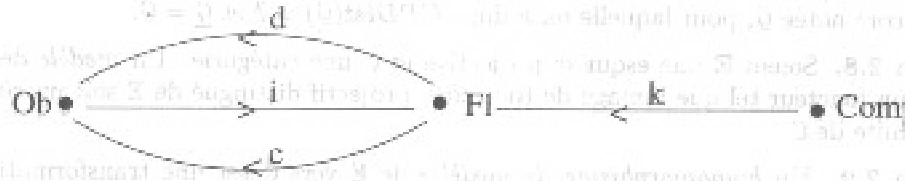
$$\begin{tikzcd} Ob & Fl \arrow[l, bend right, "d"'] \arrow[l, bend left, "c"] \end{tikzcd}$$

2)

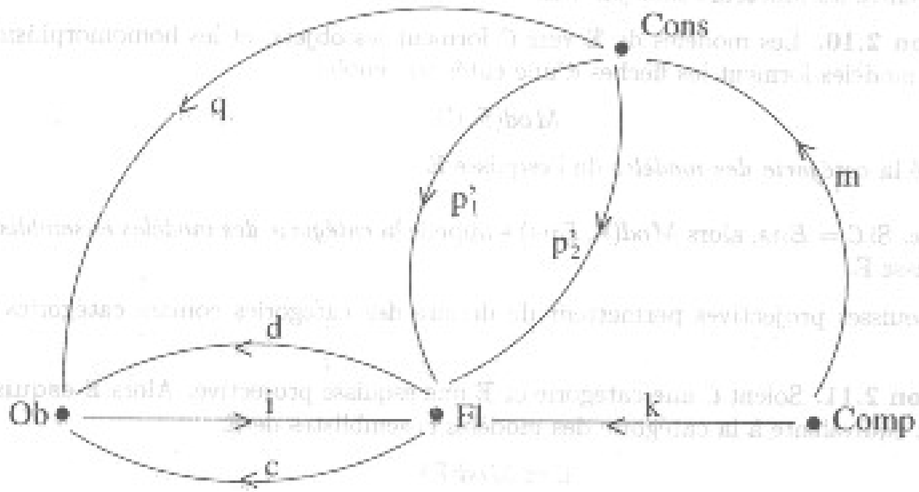
$$\begin{tikzcd} Ob \arrow[r, "i"] & Fl \arrow[l, bend right, "d"'] \arrow[l, bend left, "c"] \end{tikzcd}$$

$c.i = d.i = Id_{Ob}$ $(A \xrightarrow{id_A} A)$

3)



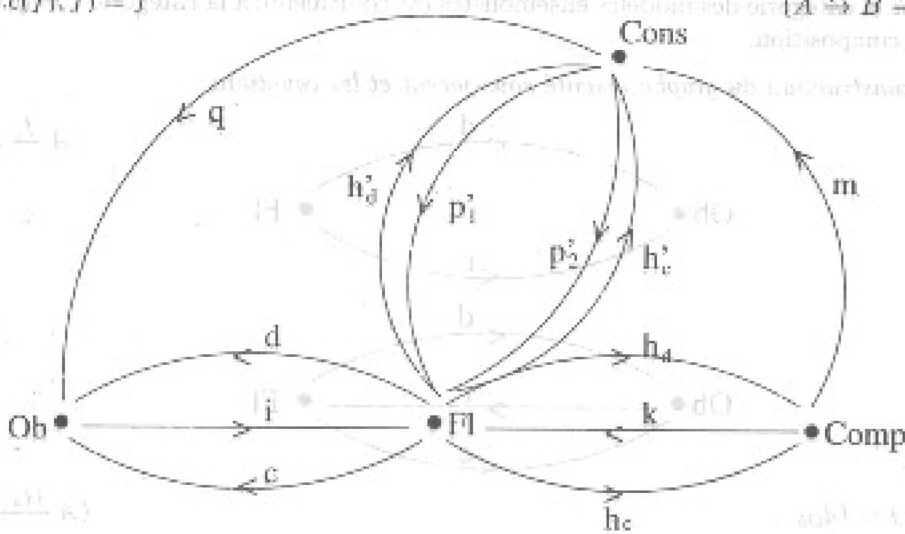
4)



$d.p'_1 = c.p'_2 = q$ $\qquad (A \xrightarrow{f_2} B \xrightarrow{f_1} C)$

5) unitarité: $k(f, i.d(f)) = f$ $\qquad (A \xrightarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B)$

$k(i.c(f), f) = f$ $\qquad (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{id_B} B)$



$p_1'.h_d' = Id_{S_2}$ $\quad$ $p_1'.h_c' = i.c$

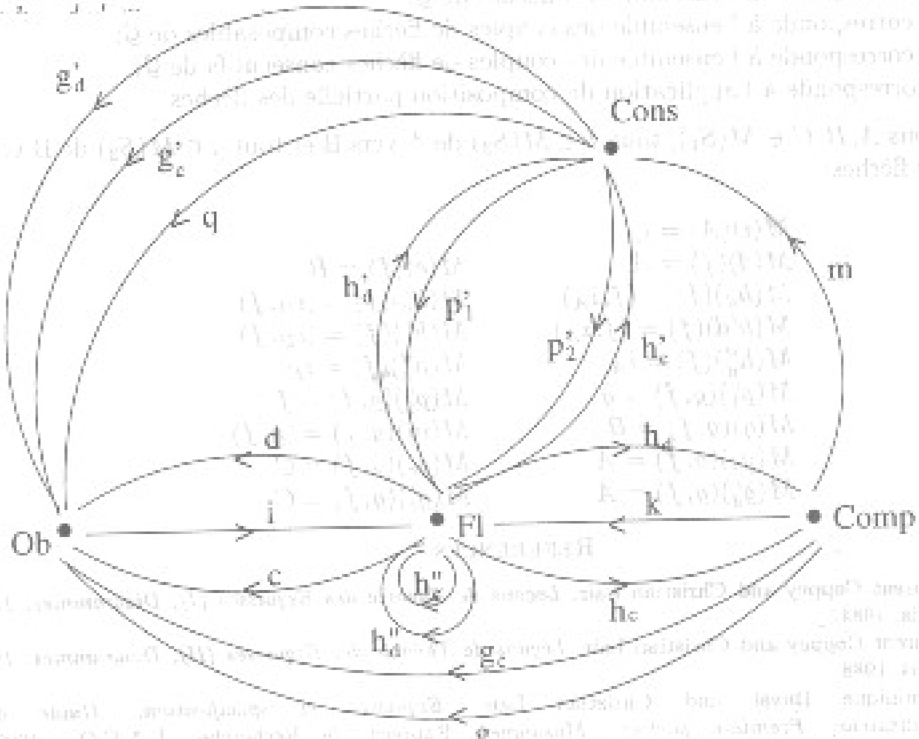
$p_2'.h_d' = i.d$ $\quad$ $p_2'.h_c' = Id_{S_3}$

$m.h_d = h_d'$ $\quad$ $m.h_c = h_c'$

$k.h_d = Id_{S_2}$ $\quad$ $k.h_c = Id_{S_3}$

6) position des composés:

$d.k = d.p_2'.m$



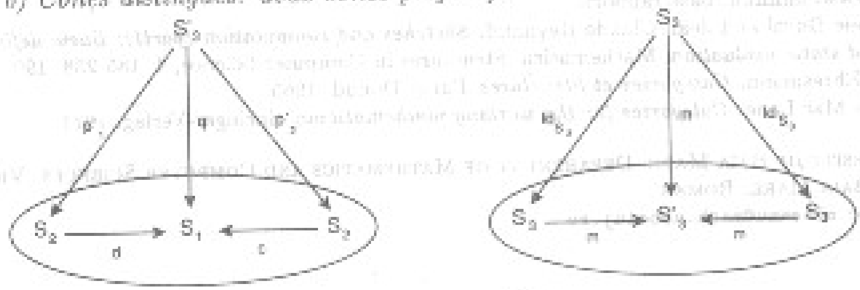
$p_2'.h_d' = h_d'' = i.d$ $\quad$ $p_1'.h_c' = h_c'' = i.c$

$g_d = d.k$ $\quad$ $g_c = c.k$

$g_d' = d.p_2'$ $\quad$ $g_c' = c.p_1'$

$g_d'.m = g_d$ $\quad$ $g_c'.m = g_c$

b) Cônes distingués: deux cônes projectifs



Remarque. Nous avons fait les notations usuelles: S_1 pour Ob, S_2 pour Fl, S_3 pour $Comp$ et S_3' pour $Cons$.

4. Conclusions

Donc, nous avons construit une esquisse d'un graphe à composition $\mathcal{G}$. Alors, si M est un modèle ensembliste de l'esquisse, on a l'interprétation suivante:

$M(S_1)$ corresponde à l'ensemble des objets de $\mathcal{G}$;
$M(S_2)$ corresponde à l'ensemble des flèches de $\mathcal{G}$;
$M(S_3)$ corresponde à l'ensemble des couples de flèches composables de $\mathcal{G}$;
$M(S_3')$ corresponde à l'ensemble des couples de flèches consécutifs de $\mathcal{G}$;
$M(k)$ corresponde à l'application de composition partielle des flèches.

Pour tous $A, B, C \in M(S_1)$, tout $f \in M(S_2)$ de A vers B et tout $g \in M(S_2)$ de B vers C on a les flèches:

$$\begin{array}{ll}
M(i)(A) = i_A & \\
M(d)(f) = A & M(c)(f) = B \\
M(h_d)(f) = (f, i_A) & M(h_c)(f) = (i_B, f) \\
M(h'd)(f) = (f, i_A) & M(h_c')(f) = (i_B, f) \\
M(h_d'')(f) = i_A & M(h_c'')(f) = i_B \\
M(p_1')(g, f) = g & M(p_2')(g, f) = f \\
M(q)(g, f) = B & M(m)(g, f) = (g, f) \\
M(g_d)(g, f) = A & M(g_c)(g, f) = C \\
M(g_d')(g, f) = A & M(g_c')(g, f) = C
\end{array}$$

References

[CL84] Laurent Coppey and Christian Lair. *Leçons de Théorie des Esquisses (I), Diagrammes, 12.* Paris, 1984.

[CL88] Laurent Coppey and Christian Lair. *Leçons de Théorie des Esquisses (II), Diagrammes, 19.* Paris, 1988.

[DL99a] Dominique Duval and Christian Lair. *Esquisses et spécification, Guide de l'utilisateur, Première partie: Mosaïques.* Rapport de Recherche, L.A.C.O., 1999. http://www.unilim.fr/laco/rapports.

[DL99b] Dominique Duval and Christian Lair. *Esquisses et spécification, Manuel de référence, Première partie: Graphes à composition.* Rapport de Recherche, L.A.C.O., 1999. http://www.unilim.fr/laco/rapports.

[DL99c] Dominique Duval and Christian Lair. *Esquisses et spécification, Manuel de référence, Deuxieme partie: Esquisses projectives.* Rapport de Recherche, L.A.C.O., 1999. http://www.unilim.fr/laco/rapports.

[DR94] Dominique Duval and Jean-Claude Reynaud. *Sketches and computation (partI): Basic definitions and static evaluation.* Mathematical Structures in Computer Science, 4 :185-238, 1994.

[Ehr65] Charles Ehresmann. *Catégories et Structures.* Paris, Dunod, 1965.

[Lan71] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, 1971.

North University of Baia Mare, Department of Mathematics and Computer Sciences, Victoriei 76, 4800 Baia Mare, Romania

E-mail address: `olteanu@math.ubbcluj.ro`