CARPATHIAN J. MATH.
22 (2006), No. 1 - 2, 7 -11

Les ideaux bornologiques de type $\mathcal{L}\Im$

BELMESNAOUI AQZZOUZ et REDOUANE NOUIRA

ABSTRACT. We introduce the bornological ideals of type $\mathcal{L}\Im$ and we show that the boundedness of a bornological ideal of type $\mathcal{L}\Im$ is unique.

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Un espace de type $\Im$ est un espace de Fréchet i.e. un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable et complet. Un espace vectoriel topologique est dit de type $\mathcal{L}\Im$ s'il s'écrit comme une limite inductive dénombrable et injective d'espaces de type $\Im$.

Dans [1], nous avons construit la catégorie abélienne des quotients de type $\mathcal{L}\Im$. L'objectif de ce papier est l'étude des idéaux bornologiques de type $\mathcal{L}\Im$. Nous montrerons que si $E = \cup_n E_n$, $F = \cup_n F_n$ et $G = \cup_n G_n$ sont trois espaces de type $\mathcal{L}\Im$, et $u : E \times F \longrightarrow G$ est une application bilinéaire à graphe séparément fermé, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que l'application $u_{|_{E_n \times F_n}} : E_n \times F_n \longrightarrow G_m$ est continue. Comme conséquence, nous déduirons alors que si $\mathcal{A}$ est une algèbre bornologique de type $\mathcal{L}\Im$ et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$, muni d'une bornologie de type $\mathcal{L}\Im$, telle que l'inclusion $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un morphisme de b-espaces, alors la bornologie de $\mathcal{I}$ est unique, et est une bornologie d'idéal. Aussi, nous établirons que si $\mathcal{J}$ est un second idéal munit d'une bornologie de type $\mathcal{L}\Im$ plus fine que la bornologie induite par $\mathcal{A}$, et tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, alors l'application inclusion $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ est un morphisme de b-espaces.

Pour établir ce travail, nous aurons besoin de quelques rappels. Si E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach, on note par $L(E_1, E_2)$ l'espace de Banach de toutes les applications linéaires bornées $E_1 \longrightarrow E_2$. D'après L. Waelbroeck [8], si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach, un sous-espace banachique de E est un sous-espace vectoriel F, muni d'une norme de Banach $\|\cdot\|_F$ telle que l'injection $(F, \|\cdot\|_F) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_E)$ est continue.

Soit E un espace vectoriel. Si B est un disque (i.e. un ensemble convexe équilibré) de E, on note E_B l'espace vectoriel engendré par B muni de la semi-norme

$$||x||_B = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : x \in \alpha B\}.$$

On dit que B est complétant si $(E_B, \|\cdot\|_B)$ est un espace de Banach.

Received: 08.05.2006; In revised form: 27.09.2006; Accepted: 01.11.2006
2000 *Mathematics Subject Classification:* 46M05, 46M15.
Key words and phrases: *Idéal bornologique de type LF, catégorie.*

On appelle bornologie de b-espace sur E, toute famille β de parties de E vérifiant les axiomes suivants:

(1)– Toute partie finie de E appartient à β.
(2)– Si $A \in \beta$ et $B \subset A$, alors $B \in \beta$.
(3)– β est stable pour la réunion finie.
(4)– L'homothétique de tout élément de β est un élément de β.
(5)– Si $A \in \beta$, alors il existe un disque complétant B de β tel que $A \subset B$.

Le couple (E, β) est alors appelé un b-espace. Un sous-espace vectoriel F d'un b-espace E est dit bornologiquement fermé, si pour tout borné complétant B de E, $F \cap E_B$ est fermé dans E_B.

Si (E_1, β_1) et (E_2, β_2) sont deux b-espaces, une application linéaire $u : E_1 \to E_2$ est dite bornée si pour tout $A \in \beta_1$ on a $u(A) \in \beta_2$; elle sera dite bornologiquement surjective si pour tout $B \in \beta_2$, il existe $A \in \beta_1$ tel que $B \subset u(A)$.

Enfin, si (E, β_E) est un b-espace, un sous-b-espace F de E est un sous-espace vectoriel muni d'une bornologie de b-espace β_F tel que l'inclusion $(F, \beta_F) \to (E, \beta_E)$ est bornée [9].

On désigne par $\mathbf{b}(E_1, E_2)$ le b-espace de toutes les applications linéaires bornées $E_1 \longrightarrow E_2$ muni de la bornologie suivante: une partie B de $\mathbf{b}(E_1, E_2)$, est bornée si pour tout borné A de E_1, l'ensemble $\{u(x) : u \in B, x \in A\}$ est borné dans E_2. On note par $\mathbf{b}$, la catégorie des b-espaces dont les morphismes sont les applications linéaires bornées. Pour plus de détails sur les b-espaces nous renvoyons le lecteur à [2] et [7].

2. Le résultat principal

Un idéal banachique $\mathcal{I}$ d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est un idéal munit d'une norme banachique $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ telle qu'il existe un certain $\lambda > 0$, $\lambda \|x\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_{\mathcal{I}}$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.

Ce n'est pas bien entendu la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$ qui nous intéresse, mais la topologie définie par $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ sur $\mathcal{I}$. Le théorème du graphe fermé montre aisément que cette topologie ne dépend pas de la norme, plus généralement, si $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ sont deux idéaux de $\mathcal{A}$, si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$ sont des normes banachiques sur $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ i.e. $\lambda \|x\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_{\mathcal{I}}$ et $\lambda \|y\|_{\mathcal{A}} \leq \|y\|_{\mathcal{J}}$ pour tous $x \in \mathcal{I}$ et $y \in \mathcal{J}$, alors l'inclusion $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ a un graphe fermé (dans $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$) pour la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} \times \|\cdot\|_{\mathcal{J}}$.

On voit ainsi que, si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux idéaux banachiques de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, alors la topologie d'idéal banachique de $\mathcal{I}$ est plus fine que la topologie induite sur $\mathcal{I}$ par celle de $\mathcal{J}$.

On continue en observant que la topologie de $\mathcal{I}$ est bien une topologie d'idéal. Si $\mathcal{I}$ est un idéal à gauche, l'application

$$(a, x) \longmapsto a.x, \ \mathcal{A} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$$

est continue.

C'est évident, on observe que les applications

$$x \longmapsto a.x, \ \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$$

et

$$a \longmapsto a.x,\ \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{I}$$

ont un graphe fermé (dans $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ ou $\mathcal{A} \times \mathcal{I}$ pour la topologie induite par celle de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, donc pour la topologie propre de $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ ou $\mathcal{A} \times \mathcal{I}$ respectivement). Ces applications sont ainsi séparément continues, et de ce fait continues.

On pose tout naturellement la définition suivante:

Définition 2.1. Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ une algèbre topologique. Un idéal topologique à gauche de $(\mathcal{A}, \tau)$ est un idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, muni d'une topologie $\tau_{\mathcal{I}}$ plus fine que la topologie induite par τ, et telle que l'application

$$(a, x) \longmapsto a.x,\ (\mathcal{A}, \tau) \times (\mathcal{I}, \tau_{\mathcal{I}}) \longrightarrow (\mathcal{I}, \tau_{\mathcal{I}})$$

soit continue.

Maintenant, on appelle b-algèbre $\mathcal{A}$, toute algèbre commutative et unitaire sur $\mathbb{C}$, munie d'une bornologie de b-espace $\beta_{\mathcal{A}}$ tel que le produit de deux éléments de $\beta_{\mathcal{A}}$ est un élément de $\beta_{\mathcal{A}}$ i.e. si B_1 et B_2 sont deux disques bornés complétants de $\mathcal{A}$, alors il existe un disque borné complétant B_3 de $\mathcal{A}$ tel que l'application bilinéaire

$$\mathcal{A}_{B_1} \times \mathcal{A}_{B_2} \longrightarrow \mathcal{A}_{B_3}$$

est bornée.

Notons aussi que toute b-algèbre $\mathcal{A}$ est une limite inductive (bornologique) d'algèbres de Banach $\mathcal{A}_B$ lorsque B décrit les disques bornés complétants de $\mathcal{A}$. Pour plus de détails sur les b-algèbres, nous renvoyons le lecteur à [3] et [7].

Définition 2.2. Soit $(\mathcal{A}, \beta)$ une b-algèbre. Un b-idéal à gauche de $(\mathcal{A}, \beta)$ est un idéal à gauche $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, muni d'une bornologie de b-espace $\beta_{\mathcal{I}}$ plus fine que la bornologie induite par β (en d'autre terme, $\beta_{\mathcal{I}} \subset \beta$), et telle que l'application

$$(a, x) \longmapsto a.x, (\mathcal{A}, \beta) \times (\mathcal{I}, \beta_{\mathcal{I}}) \longrightarrow (\mathcal{I}, \beta_{\mathcal{I}})$$

soit bornée.

Remarque 2.1. En général, la topologie ou la bornologie de l'idéal n'est pas détérminée par l'ensemble des éléments de l'idéal.

Un espace de type $\Im$ est un espace vectoriel topologique (resp. bornologique) dont la topologie est localement convexe et complétement métrisable (resp. la bornologie est la bornologie convexe associée à une une topologie de type $\Im$). La bornologie de cet espace est définie par l'ensemble des parties bornées pour la topologie (la bornologie de von Neumann).

Définition 2.3. Un espace vectoriel topologique (resp. bornologique) E est dit de type $\mathcal{L}\Im$s'il s'écrit comme une limite inductive dénombrable et injective d'espace de type $\Im$, c'est-à-dire que $E = \cup_n E_n$ avec $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ injective continue (resp. bornée) et E_n un espace de type $\Im$.

On muni l'espace de type $\mathcal{L}\Im$ soit de la topologie vectorielle limite inductive (la plus fine qui induise sur chaque E_n une topologie moins fine que la topologie donnée), soit de la bornologie limite inductive (i.e. une partie B de E est bornée s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset E_n$ et y est bornée). Seulement il faut remarquer que la topologie limite inductive de E n'est pas toujours séparée, alors que la bornologie limite inductive l'est.

Remarque 2.2. Les résultats qui sont établis par L. Waelbreock dans [6] pour les algèbres de Banach et les idéaux banachiques s'étendent sans trop de difficulté aux algèbres bornologiques de type $\mathcal{L}\Im$ et à leurs idéaux de type $\mathcal{L}\Im$, ou aux algèbres topologiques séparée de type $\mathcal{L}\Im$ et à leurs idéaux topologiques de type $\mathcal{L}\Im$.

Le résultat suivant est important, l'énoncé est loin d'être surprenant. Il se rapporte à des b-espaces de type $\mathcal{L}\Im$ et que la plus grande partie de la litérature considére des espaces topologiques de type $\mathcal{L}\Im$ (ce qui fournit des énoncés marginalement plus faibles).

Nous allons le montrer dans un cadre plus général en ne considérant que des espaces de type $\mathcal{L}\Im$ qui sont des limites

inductives d'espaces non localement convexes.

La forme donnée ici au théorème du graphe fermé de A. Grothendieck [4] est marginalement plus faible que celle que l'on trouve dans [2]. Les bornologies considérées ici sont moins fine que celle de cette référence, mais on voit aisément que les parties fermées de $E \times G$ ou de $F \times G$ sont les mêmes.

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette note:

Théorème 2.1. *Soient $E = \cup_n E_n$, $F = \cup_n F_n$ et $G = \cup_n G_n$ trois espaces de type $\mathcal{L}\Im$, et $u : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire à graphe séparément fermé. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $m \in \mathbb{N}$, tel que $u\left(E_n \times F_n\right) \subset G_m$, et la restriction $u_{|E_n \times F_n} : E_n \times F_n \longrightarrow G_m$ est continue.*

Preuve. L'application u a un graphe séparément fermé, c'est-à-dire que les applications

$$E \longrightarrow G,\ x \longmapsto u(x,y)$$

et

$$F \longrightarrow G,\ y \longmapsto u(x,y)$$

sont toutes à graphe fermé. Le théorème du graphe fermé montre donc que nous pouvons supposer u séparément bornée.

Etablissons d'abord le résultat lorsque F est un espace vectoriel normé. A l'application u nous associons l'application $u_1 : E_n \longrightarrow L\left(F,G\right)$ définie par $u_1\left(x\right)\left(y\right) = u(x,y)$, où $L\left(F,G\right)$ est l'espace de toutes les applications linéaires bornées de F dans G. L'espace $L\left(F,G\right)$ est un $\mathcal{L}\Im$-espace pour la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité de F. L'application u_1 est bornée, et a donc un graphe fermé lorsqu'on munit $L\left(F,G\right)$ de la bornologie de la convergence simple. Le graphe de u_1 est à fortiori fermé dans $E_n \times L\left(F,G\right)$ lorsque $L\left(F,G\right)$ est muni de sa bornologie de type $\mathcal{L}\Im$ qui est la plus fine. Le théorème du graphe fermé de Grothendieck [4] ou [5], montre alors que $u_1\left(E_n\right) \subset L\left(F,G_m\right)$, et donc $u_1\left(E_n \times F\right) \subset G_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Lorsque E et F sont deux espaces de Fréchet généraux nous procédons par l'absurde. Nous supposons que $u(E, F) \nsubseteq G_n$ pour tout n. Nous choisissons des suites $(x_n) \subset E$ et $(y_n) \subset F$ telles que $u(x_n, y_n) \notin G_n$.

Rappelons que dans un espace de Fréchet, on peut associer à une suite (x_n) de vecteurs, une suite (γ_n) de scalaires positifs telle que $(\gamma_n x_n)$ ait une fermeture convexe bornée. Posons alors $x'_n = \gamma_n x_n$ et $y'_n = \lambda_n y_n$ (où $(\lambda_n y_n)$ a également une fermeture convexe bornée). Nous voyons que $u(x'_n, y'_n) \notin G_n$. Soient B la fermeture convexe équilibrée fermée de la suite (x'_n), et C celle de la suite (y'_n). Alors E_B et F_C sont des espaces de Banach. La restriction u' de u à $E_B \times F_C$ est une application séparément bornée de $E_B \times F_C \longrightarrow G = \cup_n G_n$. Nous avons vu que $u(E_B \times F_C) \subset G_m$ pour un m convenable, mais $x_n \in E_B$, $y_n \in F_C$, et $u(x_n, y_n) \notin G_n$, ce qui est une contradiction. $\square$

Comme conséquence du théorème précédent, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 2.1. *Soient $\mathcal{A}$ une b-algèbre de type $\mathcal{L}\Im$ et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$. Supposons qu'il soit possible de mettre sur $\mathcal{I}$ une bornologie de type $\mathcal{L}\Im$, qui soit telle que l'inclusion $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ soit un morphisme de b-espaces, alors la bornologie de $\mathcal{I}$ est unique et est une bornologie de b-idéal. Si $\mathcal{J}$ est un second idéal tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ et qu'on peux également le munir d'une bornologie de b-espace de type $\mathcal{L}\Im$ plus fine que la bornologie induite par $\mathcal{A}$, alors l'inclusion $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ est un morphisme de b-espaces.*

Preuve. L'unicité de la bornologie de $\mathcal{I}$, si elle existe, et le faite que l'inclusion $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ est un morphisme de b-espaces si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont munis de bornologies de type $\mathcal{L}\Im$ plus fine l'une de l'autre que la bornologie induite par celle de $\mathcal{A}$, découlent de manière immédiate du théorème précédent.

On montre aussi que $\mathcal{I}$ est un idéal bornologique en observant que la multiplication $\mathcal{A} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$ a un graphe séparèment fermé, et en appliquant le Théorème 2.1 ci-dessus. $\square$

REFERENCES

[1] Aqzzouz, B. and R. Nouira, R., *La catégorie abélienne des quotients de type $\mathcal{L}\Im$*, to appear in Czechoslovak Math. J. 2006

[2] Hogbe Nlend, H., *Théorie des bornologies et applications*, Lecture Notes in Math. **213**, 1971

[3] Hogbe Nlend, H., *Les fondements de la théorie spectrale des algébres bornologiques*, Bol. Soc. Bras. de Matematica **3**, no.1, 1972

[4] Grothendieck, A., *Espaces vectoriels topologiques, São Paulo*, 1958

[5] DeWilde, M., *Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes*. Mémoire Soc. Roy. de Liége, **18**, 1969

[6] Waelbroeck, L., *Théorie des algèbres de Banach et algèbres localement convexes*, Les presses de l'Université de Montréal, Canada 1962

[7] Waelbroeck, L., *Topological vector spaces and algebras*, Lectures Notes in Math. **230**, 1971

[8] Waelbroeck, L., *Quotient Banach Spaces*, Banach Center Publ. (1982), 553-562 and 563-571, Warsaw

[9] Waelbroeck, L., *The category of quotient bornological spaces*, J. A. Barroso (ed.), Aspects of Mathematics and its Applications, Elsevier Sciences Publishers B. V. (1986), 873-894

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE, HARMONIQUE ET COMPLEXE
B.P. 133, KÉNITRA, MORROCO
E-mail address: baqzzouz@hotmail.com